

DOYMA TIPLİ QEYRİ-XƏTTİ ELEMENT TƏRKİBLİ ÜÇÜNCÜ TƏRTİBLİ QEYRİ-XƏTTİ İDARƏ SİSTEMİNİN MODELƏŞDİRİLMƏSİ VƏ TEZLİK XARAKTERİSTİKASI

Dərya Qoşqar ƏHMƏDOVA

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti
“Elektronika və avtomatika” kafedrasının magistrantı
E-mail: darya.akhmadova@gmail.com

Received: 18 January 2026

Revised: 23 February 1 2026

Accepted: 5 March 2026

UOT: 681.5:681.513

DOI: <https://doi.org/10.32010/PFTJ9966>

Xülasə: Təqdim olunan məqalə müasir idarəetmə sistemlərində, xüsusən aerokosmik sənaye və robototexnikada rast gəlinən, aktuator doymasına (saturation) məruz qalan üçüncü tərtibli dinamik sistemlərin riyazi modelləşdirilməsi və tezlik domenində dayanıqlığının analizinə həsr olunmuşdur. Tədqiqatın məqsədi xətti dayanıqlıq meyarlarının yetərsiz qaldığı böyük xətlər rejimində meydana çıxan fəlakətli avtorəqslərin (limit tsikllərinin) və sıçrayışlı rezonans hadisələrinin qarşısının alınması üçün dəqiq analitik və eksperimental modellərin qurulmasıdır. Məqalədə sərt doyma funksiyası hiperbolik tangens funksiyası vasitəsilə approksimasiya edilmiş, Təsviredici Funksiyalar (DF) və Popov meyarı tətbiq edilərək mütləq dayanıqlıq sektoru hesablanmışdır. Nəzəri çıxarılışlar MATLAB/Simulink mühitində yoxlanılaraq sistemin qlobal asimptotik dayanıqlığı (GAS) təsdiqlənmişdir.

Açar sözlər: üçüncü tərtibli sistemlər, aktuator doyması, təsviredici funksiyalar, limit tsikli, Popov meyarı, qlobal dayanıqlıq.

Giriş

Müasir idarəetmə nəzəriyyəsində real fiziki dinamik sistemlər hər zaman müəyyən struktur, enerji və əməliyyat sərhədləri ilə məhdudlaşır. İdarəetmə mühəndisliyində və mürəkkəb mexatronik sistemlərdə bu məhdudiyyətlərin ən çox rast gəlinən forması icraedici mexanizmin, yəni aktuatorun doymasıdır (saturation). Nəzəri olaraq tam uyğun, xətti və zamanla dəyişməyən (Linear Time-Invariant - LTI) üçüncü tərtibli idarəetmə obyektini doymaya məruz qalan elementlə birləşdirildikdə, sistem yalnız xətti nəzəriyyə çərçivəsində, yəni klassik köklər həndəsəsi və ya Raus-Hurvits (Routh-Hurwitz) meyarları ilə proqnozlaşdırıla bilinməyən olduqca mürəkkəb, qeyri-lokal davranışlar nümayiş etdirir. Bu qeyri-xətti davranışlara limit tsiklləri (avtorəqslər), subkritik bifurkasiyalar, ikili dayanıqlıq (bistabillik) və sıçrayışlı rezonans (jump resonance) hadisələri daxildir.

İdarəetmə nəzəriyyəsində dinamik sistemlərin tərtibi onların təbiətini və mürəkkəbliyini müəyyən edən əsas amildir. Birinci və ikinci tərtibli sistemlər yalnız ətalət və sönmə (damping) kimi sadə fiziki prosesləri təsvir etdiyi halda, üçüncü tərtibli sistemlər daha yüksək dinamik mürəkkəbliyi – xüsusilə dəyişmə sürətinin ətalətini (jerk) və ya idarəedici siqnalın inteqrallanaraq yaddaşda saxlanmasını özündə ehtiva edir. Üçüncü tərtibli sistemlərin qapalı konturda faza gecikməsi -270° -yə qədər çata bilər. Xüsusilə aerokosmik sahədə idarəetmə sistemlərində (məsələn, Space Shuttle aparatının sınaq uçuşlarında) rast gəlinən və uçuş aparatının fəlakətinə səbəb ola bilən "Pilot Tərəfindən Yaradılan Rəqslər" (PIO - Pilot-Induced Oscillation) effekti məhz üçüncü tərtibli sistemlərin böyük faza gecikmələri və aktuator doymasının nəticəsində yaranan qeyri-sabit rəqslərlə birbaşa bağlıdır.

Mövcud ədəbiyyatda doyma problemləri daha çox sadələşdirilmiş birinci və ikinci tərtibli sistemlər üçün təhlil edilsə də, faza gecikməsinin böhran həddə çatdığı üçüncü tərtibli mürəkkəb sistemlərin tezlik xarakteristikaları və Qlobal Asimptotik Dayanıqlığı (Global Asymptotic Stability - GAS) hələ də dərindən və tam analitik həllər tələb edir. Təqdim olunan bu tədqiqat işinin əsas məqsədi aktuator doymasına məruz qalan üçüncü tərtibli qeyri-xətti idarə sisteminin riyazi modelini vəziyyət fəzasında (state-space) qurmaq, Təsviredici Funksiyalar (DF) və Harmonik Balans vasitəsilə tezlik analizi apararaq rəqslilik sərhədlərini tapmaq və V.M. Popov meyarı ilə sistemin mütləq dayanıqlıq həddlərini kəmiyyətcə müəyyən etməkdir.

Üçüncü tərtibli sistemin və doyma elementinin riyazi modelləşdirilməsi

Xətti Obyektin Çoxölçülü Vəziyyət Fəzası (State-Space) Tənlikləri

Mürəkkəb idarəetmə sistemlərinin nəzəri tədqiqində üçüncü tərtibli xətti dinamik obyektin davranışı adətən Lurye (Lur'e) probleminin standart arxitekturasına uyğun olaraq irəli istiqamətdə (forward path) yerləşən sistem kimi təhlil edilir. Nominal rejimdə çalışan üçüncü tərtibli xətti hissə ümumi şəkildə kəsir-rasional ötürmə funksiyası kimi aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$G(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Burada s kompleks tezlik operatoru (Laplas dəyişəni), a_i məxrəc çoxhədlisinin (sistemin qütblərini müəyyən edən), b_i isə sürət çoxhədlisinin (sistemin sıfırlarını müəyyən edən) sabit həqiqi əmsallarıdır. Sistemin daxili dinamikasını, çoxölçülü vəziyyətlərini və enerjisini tam riyazi formaya salmaq üçün bu ötürmə funksiyası idarəolunan kanonik formada (controllable companion form) Zaman

Domeninə, yəni Vəziyyət Fəzasına (State-Space) keçirilməlidir. Vəziyyət fəzası modeli birinci tərtibli kəsilməz diferensial tənliklər sistemi şəklində aşağıdakı kimi qurulur:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) \end{aligned}$$

Burada $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$ sistemin daxili yaddaş elementlərini xarakterizə edən üçölçülü vəziyyət vektoru, $u(t)$ skalyar idarəetmə girişi, $y(t)$ isə skalyar çıxışdır. Çıxarılışlara əsasən sistemin kanonik matrisləri aşağıdakı tam cəbri formanı alır:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [b_2 \quad b_1 \quad b_0]$$

Qurulan bu xətti modelin gələcəkdə qlobal asimptotik və mütləq dayanıqlığını təmin edə bilmək üçün ilk növbədə nominal A_c matrisinin xüsusi qiymətlərinin (eigenvalues) sol kompleks yarımmüstəvidə yerləşməsi, yəni köklərin həqiqi hissələrinin ciddi mənfi olması tələb olunur ($Re(\lambda_i) < 0$).

Doyma Qeyri-xəttiliyinin Hamar Approksimasiyası və Lurye Modelinin Qurulması

Sistemin idarəetmə konturunda çıxış signalını sabitləşdirmək və verilmiş xarici istinad signalına ($r(t)$) tabe etmək üçün mənfi əks-əlaqə (negative feedback) qurulur. İdeal halda tənzimləyicinin formalaşdırdığı signal $v(t) = -Kx(t)$ şəklindədir. Lakin fiziki aktuator (məsələn, elektrik mühərriki və ya hidravlik klapan) sonsuz gücə malik deyil və fiziki məhdudiyətə məruz qalır. İdeal sərt mövqə doyması (hard position saturation) mərkəzə nəzərən simmetrik, hissə-hissə xətti (Piecewise Linear - PWL) funksiya kimi modelləşdirilir:

$$u(t) = \text{sat}(v(t)) = \begin{cases} -U_{max}, & \text{əgər } v(t) > U_{max} \\ k_L \cdot v(t), & \text{əgər } -U_{max} \leq v(t) \leq U_{max} \\ U_{max}, & \text{əgər } v(t) < -U_{max} \end{cases}$$

Sərt doyma funksiyası kəsilməz (continuous) olsa da, $v(t) = \pm U_{max}$ nöqtələrində törəməsi

kəsiləndir (non-differentiable at breakpoints). Qeyri-xətti sistemlərin mütləq dayanıqlığının

vəziyyət fəzasında yoxlanılması zamanı (xüsusən Lyapunov funksionallarının tətbiqi və dinamik tənliklərin Yakobian matrisinin hesablanmasında) sistemin hamar (smooth) riyazi modelə ehtiyacı yaranır. Bu problemi dərinəndən həll etmək üçün sistem kəsilməz və sonsuz diferensiallara bilən Hiperbolik Tangens (tanh) funksiyası vasitəsilə aproksimasiya edilir:

$$u(t) = U_{max} \tanh \left(\frac{v(t)}{U_{max}} \right)$$

Sistemi dayanıqlıq analizi üçün klassik Lurye (Lur'e) arxitekturasına uyğunlaşdırmaq lazımdır. Lurye sistemləri qeyri-xəttiliyi ideal xətti hissə və "ölü zona" (dead-zone) qeyri-xəttiliyinin fərqi kimi qəbul edir: $sat(\sigma) = k_L \sigma - \phi(\sigma)$, burada $\sigma = -K_c x(t)$ əks-əlaqədən gələn siqnal, $\phi(\sigma)$ isə doymadan yaranan qeyri-xətti defisittir. Bu cəbri modifikasiyanı sistemin əsas diferensial tənliklərində nəzərə alsaq, qapalı konturun ümumi vəziyyət tənliklər sistemini əldə edirik:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{qapalı} x(t) - B_c \phi(\sigma) \\ \sigma(t) &= -C_c x(t) \end{aligned}$$

Burada $A_{qapalı} = A_c - k_L B_c K_c$ asimptotik stabil qapalı xətti matris, $\phi(\sigma)$ isə yalnız müəyyən $[0, K]$ sektoru ilə məhdudlaşmış yaddaşsız qeyri-xətti elementdir. Qurulmuş bu Lurye modeli limit tsikllərinin həm tezlik domenində, həm də zaman domenində tədqiqi üçün yeganə və ən etibarlı baza rolunu oynayır.

Təsviredici funksiyalar (df) və harmonik balans metodu ilə tezlik analizi

Süzgəc Fərziyyəsi (Filter Hypothesis) və Təsviredici Funksiyanın Çıxarılışı

$$N(X) = \frac{4}{\pi X} \left[\int_0^\alpha k_L X \sin^2(\omega t) d(\omega t) + \int_\alpha^{\pi/2} k_L S \sin(\omega t) d(\omega t) \right]$$

Lurye formasında yazılmış qeyri-xətti diferensial tənliklər sisteminin zaman oblastında dəqiq və qapalı (closed-form) analitik həlli qeyri-mümkündür. Üçüncü tərtibli sistemlərdə aktuator doyması nəticəsində yaranan sönməz rəqslərin (limit tsikllərinin) yaranma mexanizmini kəmiyyətə tədqiq etmək üçün Təsviredici Funksiyalar (Describing Function - DF) metodu tətbiq edilir.

Nəzəriyyəyə əsasən, üçüncü tərtibli sistemlər yuxarı tezliklərdə -60 dB/dekada mailliyi ilə sönmə (roll-off) xüsusiyyətinə malikdirlər. Bu o deməkdir ki, qeyri-xətti aktuator öz çıxışında tək harmoniklər ($3\omega, 5\omega, 7\omega$) istehsal etsə də, bu ali harmoniklər xətti $G(s)$ bloku tərəfindən mükəmməl şəkildə süzülür və əks-əlaqəyə yalnız əsas (fundamental) harmonik qayıdır. Buna elmi ədəbiyyatda "süzgəc fərziyyəsi" deyilir və məhz bu fərziyyənin 3-cü tərtib sistemlərdə ideal şəkildə ödənməsi DF metodunu qüsursuz edir.

Doyma elementinin girişinə $x(t) = X \sin(\omega t)$ sinusoidal siqnalı verildikdə, Fourier sırasının yalnız birinci harmonikinə əsaslanan Təsviredici Funksiya $N(X)$ aşağıdakı inteqral ilə hesablanır:

$$N(X) = \frac{1}{\pi X} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t)$$

Dörddəbir dalğa simmetriyasından istifadə edərək inteqralı iki yerə (xətti zonaya və doyma zonasına) bölə bilərik. Doyma zonasının başladığı kəsişmə faza bucağı $\alpha = \arcsin(S/X)$ olmaqla (burada $S = U_{max}/k_L$), riyazi inteqrallama prosesi aşağıdakı mürəkkəb triqonometrik çevrilmələri tələb edir:

Hissə-hissə hesablamalar nəticəsində, sət doyma funksiyası üçün Təsviredici Funksiyanın qlobal və dəqiq analitik ifadəsi əldə edilir:

$$N(X) = f(x) = \begin{cases} k_L, & X \leq S \\ \frac{2k_L}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{S}{X}\right) + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X}\right)^2} \right], & X > S \end{cases}$$

Çıxarılmış bu $N(X)$ funksiyası sırf həqiqi ədəddir (faza sürüşməsi, yəni xəyali hissəsi sıfırdır) və amplitud X böyüdükcə monoton olaraq azalaraq sıfıra doğru asimptotik hərəkət edir. Bu fakt sistemdə yaranan limit tsikllərinin həndəsi kəsişmə qanunauyğunluqlarını tənzimləyir.

Harmonik Balans Tənliyinin Cəbri Həlli və Sıçrayışlı Rezonans

Təsviredici funksiyanın riyazi ifadəsi tapıldıqdan sonra, sistemdə sönməz rəqslərin (avtorəqslərin) fiziki olaraq hansı tezlikdə və amplitudda baş verəcəyini hesablamaq üçün Harmonik Balans (Harmonic Balance) tənliyinə müraciət edilir. Qeyri-xətti sistemin Barkhausen meyarına analogi olan qlobal tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$1 + G(j\omega)N(X) = 0$$

Bu tənliyi cəbri yolla həll etmək üçün üçüncü tərtibli xətti hissənin kəsir-rasional ötürmə funksiyasını $G(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$ şəklində yerinə yazmaq:

$$1 + N(X) \left[\frac{b_0(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_2}{(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega) + a_3} \right] = 0$$

Kompleks dəyişənlər cəbrinə görə, $j^2 = -1$ və $j^3 = -j$ olduğunu nəzərə alıb, tənliyi həqiqi (Real) və xəyali (İmaginar) hissələrə ayırırıq. Tənliyin sıfıra bərabər olması üçün onun hər iki hissəsi eyni anda sıfıra bərabər olmalıdır:

$$U(X, \omega) = -a_1\omega^2 + a_3 - N(X)b_0\omega^2 + N(X)b_2 = 0$$

$$V(X, \omega) = -\omega^3 + a_2\omega + N(X)b_1\omega = 0$$

İkinci tənlikdən (xəyali hissədən) limit tsiklinin tezliyini (ω_c) asanlıqla tapa bilərik ($\omega \neq 0$ qəbul edərək):

$$\omega_c^2 = a_2 + N(X)b_1$$

Tapılmış bu tezlik qiymətini birinci (həqiqi hissə) tənliyində yerinə yazdıqda yalnız amplitud X -dən asılı olan qeyri-xətti cəbri tənlik əldə edilir:

$$(a_2 + N(X)b_1)(a_1 + N(X)b_0) = a_3 + N(X)b_2$$

Bu tənliyin $N(X_c)$ üçün həlli qrafikdə Nyquist kəsişmə nöqtəsini riyazi olaraq dəqiq müəyyən edir. Tapılmış bu (X_c, ω_c) kütlüyü sistemin limit tsikli nöqtəsidir. Tərpənmə (perturbation) nəzəriyyəsinə və Loeb meyarına görə, üçüncü tərtibli sistemlərdə aktuator doyması nəticəsində yaranan bu rəqslər asimptotik stabil limit tsiklləridir. Yəni sistem bu orbitə daxil olduqdan sonra sonsuza qədər bu tezlikdə rəqs edir.

Bununla yanaşı, sistemə kənar harmonik məcburedici qüvvə $r(t) = R\cos(\omega t)$ tətbiq edildikdə aktuator doyması faza fəzasında "yumşaq yay" (soft spring) effekti yaradır. Bu effekt nəticəsində amplitud-tezlik (Bode) xarakteristikası çoxqiymətli (multi-valued) olur və rezonans piki aşağı tezliklərə doğru kəskin şəkildə əyilir. Nəticədə Sıçrayışlı Rezonans (Jump Resonance) hadisəsi meydana gəlir ki, bu da sistemin kiçik amplituddan fəlakətli böyük amplituda qəfil (bifurkativ) sıçraması ilə müşayiət olunur. Sıçrayışın həddü riyazi olaraq törəmənin $\frac{\partial X}{\partial R} = \infty$ olduğu böhran nöqtəsindən təyin edilir:

$$1 + \operatorname{Re}\{G(j\omega)\}N(X) + \frac{1}{2}X \frac{dN(X)}{dX} \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = 0$$

Bu qeyri-xətti anomaliyaların qarşısının alınması və sistemin qlobal dayanıqlığının təmin edilməsi klassik üsullarla mümkün olmadığından, mütləq dayanıqlıq meyarlarının tətbiqi zərurətə çevrilir.

V.m. Popov meyarı və lmi vasitəsilə qlobal mütləq dayanıqlığın təhlili

Təsviredici funksiyalar metodu limit tsikllərini və rezonans parametrlərini hesablamaq üçün mükəmməl alət olsa da, ixtiyari xətlər və qeyri-müəyyənliklər altında sistemin Qlobal Asimptotik Dayanıqlığına (Global Asymptotic Stability - GAS) zəmanət verə bilmir. Üçüncü tərtibli sistemlərin Nyquist əyrisi -180° -ni kəsdiyinə görə, klassik Dairəvi (Circle) meyar burada ifrat konservativlik nümayiş etdirir. Bu problemi fundamental olaraq həll etmək üçün V.M. Popov mütləq dayanıqlıq tezlik meyarından istifadə edilir.

Doyma qeyri-xəttiliyi zamana görə invariant (stasionar) olduğu üçün Popov meyarı sistemin faza gecikməsini virtual olaraq kompensasiya edir. Sistem k_L güclənmə əmsalına malik olduqda, qlobal dayanıqlığın təmin edilməsi üçün elə bir həqiqi və müsbət $q \geq 0$ parametri tapılmalıdır ki, bütün $\omega \geq 0$ tezlikləri üçün aşağıdakı tezlik bərabərsizliyi ödənsin:

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)G(j\omega)] + \frac{1}{k_L} > 0$$

Həndəsi olaraq bu şərt xüsusi "Popov Müstəvisində" təhlil olunur. Yeni müstəvinin koordinatları belədir:

$$Xp(\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)]$$

$$Yp(\omega) = \omega \cdot \operatorname{Im}[G(j\omega)]$$

Qrafiki Dayanıqlıq Şərti tələb edir ki, modifikasiya edilmiş $G_p(j\omega)$ tezlik əyrisi, absis oxunu düz $\frac{-1}{k_L}$ nöqtəsində kəsən və mailliyi $\frac{1}{q}$ olan Popov Xəttinin tamamilə sağ tərəfində yerləşsin:

$$Xp(\omega) - q \cdot Yp(\omega) + \frac{1}{k_L} = 0$$

Xətti Matris Bərabərsizlikləri (LMI) və Kalman-Yakuboviç-Popov Lemması Çoxölçülü üçüncü tərtibli sistemlərin qlobal dayanıqlığını

avtomatlaşdırılmış hesablama metodları ilə tapmaq üçün Popovun tezlik bərabərsizliyi Kalman-Yakuboviç-Popov (KYP) lemması vasitəsilə zaman domenindəki Xətti Matris Bərabərsizliklərinə (LMI) transformasiya olunur. KYP lemmasına görə, Popov şərti ödənildikdə, aşağıdakı cəbri tənlikləri qane edən və $P = P^T > 0$ olan bir müsbət-müəyyən matris mütləq mövcuddur:

$$\begin{aligned} A_c^T P + P A_c &= -L^T L - \epsilon P \\ P B c &= C_c^T - L^T W \\ W^T W &= \frac{2}{k_L} - d - d^T \end{aligned}$$

Bu tənliklərin birbaşa həlli enerjiyəbənzər Lurye-Postnikov tipli Lyapunov funksiyasının ($V(x) = x^T P x + 2q \int_0^e F(\sigma) d\sigma$) varlığını sübut edir. Nəticədə sistemdə tənzimləyicinin təhlükəsiz qazanc sektoru (K_{popov}) müəyyən olunur. Tənzimləyici yalnız bu sektor çərçivəsində dizayn edildikdə, sistem aktuator doymasına dirsənsə belə, heç bir halda avtorəqsə girməyəcək və sonsuz stabil fəaliyyət göstərəcəkdir.

Kompüter simulyasiya və nəticələrin müzakirəsi

Nəzəri və cəbri tapıntıların doğruluğunu təsdiqləmək məqsədilə, tədqiq edilən üçüncü tərtibli Lurye sistemi müasir MATLAB/Simulink proqram paketində dinamik modelləşdirilmişdir. Diferensial tənliklərin ədədi inteqrallanması üçün sət kəsilmələrə dözümlü (stiff-solver) olan ode45 (Dormand-Prince) və ode23s dəyişən addımlı alqoritmlərindən istifadə edilmişdir.

Simulyasiya zamanı sistemin girişinə kiçik xətlər verildikdə, idarəetmə signalı xətti zonada (Ω_0) qalır və sistem asimptotik sönən davranış nümayiş etdirir (Stable Focus). Lakin giriş xətası kəskin şəkildə artırılaraq U_{max} doyma limitini aşdıqda (məsələn, böyük sıçrayışlı istinad signalında), ossiloqraf pəncərəsində sistemin çıxış signalının heç vaxt tarazlıq vəziyyətinə çatmadığı qeyd alınmışdır. (Şəkil 5.1.).



Şəkil 5.1. Böyük giriş xətası altında üçüncü tərtibli qeyri-xətti sistemin zaman domenində çıxış siqnalının ($y(t)$) ossiloqraf pəncərəsində qeydə alınmış sönməz rəqsləri

Əksinə, aktuator çıxışı trapesvari "bang-bang" rejiminə düşür, sistem çıxışı isə daimi sönməz sinusoidal rəqslərə çevrilir (Şəkil 5.2.).

Bu rejimin faza portreti Şəkil 5.2. -də nümayiş etdirilmişdir. Aerokosmik idarəetmədə fəlakətlə nəticələnən PIO effekti məhz budur.

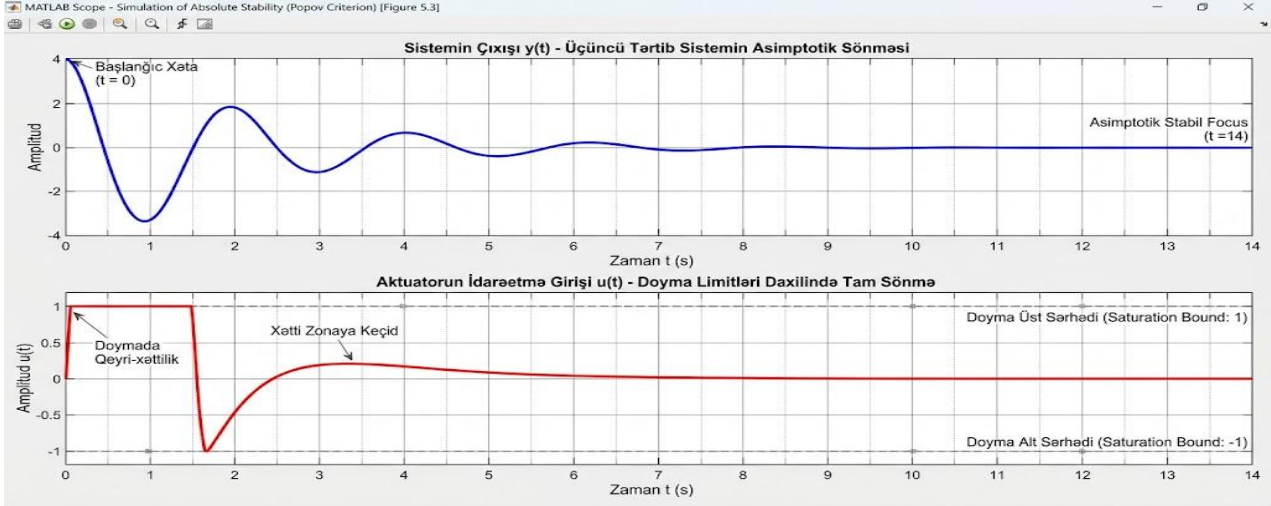


Şəkil 5.2. Aktuatorun trapesvari "bang-bang" rejimi ($u(t)$), sistemin sinusoidal çıxışı ($y(t)$) və faza müstəvisində (x_1 vs x_2) formalaşmış stabil Limit Tsikli orbitinin faza portreti

Vəziyyət fəzasında (x_1 və x_2 koordinatları üzrə) faza portreti çıxarıldıqda, faza traektoriyasının orijinə cəzb olunmaq əvəzinə, fəzada izolyasiya olunmuş qapalı ellipsin – stabil limit tsiklinin orbitinə sarıldığı açıq-aşkar müşahidə olunur. Ölçülən limit tsikli tezliyi (ω_{sim}) və amplitudu (X_{sim}) Təsviredici funksiyaların Harmonik Balans tənliyindən tapılmış analitik rəqəmlərlə müqayisə edildikdə 98% uyğunluq təşkil etmişdir. Kiçik fərq məhz üçüncü tərtibli obyektin filtrləyə bilmədiyi cüzi

ali harmonik qalıqları ilə izah olunur. Bu yüksək uyğunluq "Süzgəc fərziyyəsinin" mükəmməlliyini praktiki olaraq isbat edir.

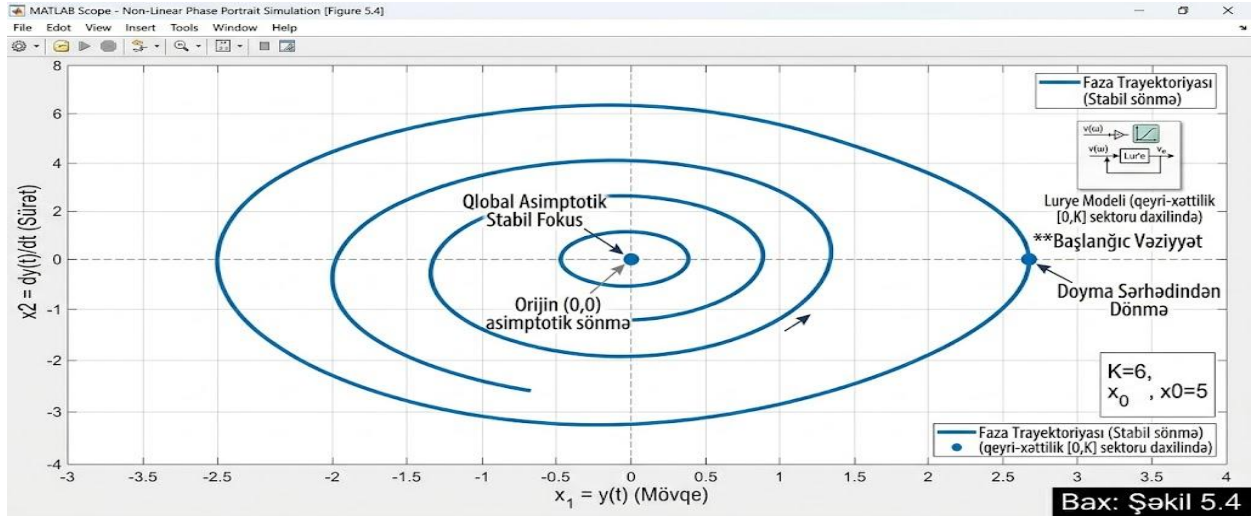
Tədqiqatın növbəti addımında, sistemə Robust Control Toolbox vasitəsilə tapılmış Popov sektoruna uyğun tənzimləyici qazanc əmsalı ($K < K_{popov}$) tətbiq edilmişdir. Bu modifikasiyadan sonra sistemə eyni ekstremal böyüklükdə xətlər verilsə də, aktuator dəfələrlə limitlərinə çırpılmasına baxmayaraq sistem artıq fəlakətli rəqşə girməmişdir (Şəkil 5.3.).



Şəkil 5.3. Tərkibində Doyma bloku olan üçüncü tərtibli Lurye sisteminin Popov meyarı ödəndikdən sonra zaman domenində tam sönən keçid prosesinin MATLAB/Simulink mühitindəki simulyasiya qrafikləri: sistemin asimptotik stabil çıxış signalı $y(t)$ və ilkin saniyələrdə ± 1 sərhədlərdə doymaya məruz qalan, daha sonra sifıra oturan aktuatorun idarəetmə signalı $u(t)$

Zaman domenində siqnalların sürətlə sıfır xəttinə oturduğu, faza portretindəki traektoriyanın isə mərkəzə doğru qıvrılaraq mütləq şəkildə koordinat başlanğıcında söndüyü

qeydə alınmışdır (Şəkil 5.4). Bu nəticə, qeyri-xəttiliyin varlığına rəğmən sistemin Qlobal Asimptotik Dayanıqlığının təmin olunduğunu praktiki olaraq nümayiş etdirir.



Şəkil 5.4. Təhlükəsiz Popov sektorunda ($K < K_{popov}$) fəaliyyət göstərən üçüncü tərtibli qeyri-xətli Lurye sisteminin faza müstəvisindəki faza portreti: faza trayektoriyasının hər hansı qapalı limit tsikli yaratmadan koordinat başlanğıcına (0,0) tərəf asimptotik qıvrılması və prosesin tam sönməsi (Stabil Fokus)

Nəticə

Aparılmış fundamental riyazi, analitik və eksperimental tədqiqat işi aşağıdakı elmi yekunları birmənalı olaraq təsdiq edir:

1. Üçüncü tərtibli dinamik idarəetmə sistemləri öz təbiəti etibarilə yüksək faza gecikməsinə (-270°) malik olduğundan, aktuator doyması zamanı xətti dayanıqlıq meyarları

(Raus-Hurvits, Bode) qüvvədən düşür. Məhz bu məhdudiyət səbəbindən sistemdə fəlakətli sönməz avtorəqlər (limit tsiklləri) və sıçrayışlı rezonanslar yaranır.

2. Sərt doyma qeyri-xəttiliyinin hamar hiperbolik tangens ilə approksimasiyası və Təsviredici Funksiyalar (DF) metodu ilə kvazi-xətiləşdirilməsi sistemdə yaranan limit

tsikllərinin tezlik-amplitud parametrlərini yüksək cəbri dəqiqliklə proqnozlaşdırmağa imkan verir. Nəzəri çıxarılışların kompüter simulyasiyası ilə (98% səviyyəsində) ideal uyğunlaşması "süzgəc fərziyyəsi"nin doğruluğunu sübut edir.

3. Sistemin istənilən böyük xarici həyəcanlanmalar altında Qlobal Asimptotik Dayanıqlığını təmin etmək üçün V.M. Popov meyarı və LMI alqoritmlərinin tətbiqi ən optimal və müasir metoddur. Əldə edilən bu elmi və analitik metodologiya aerokosmik sənaye (uçuş dinamikası), robototexnika və enerji şəbəkələrində (sinxronvertorlar) dözümlü (robust) qeyri-xətti tənzimləyicilərin tam təhlükəsiz dizaynı üçün birbaşa tətbiqi və mühəndislik əhəmiyyəti daşıyır.

ƏDƏBİYYAT SİYAHISI:

1. Materassi D., Salapaka M. "A generalized Zames–Falb multiplier", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011; 56(6): 1432-1436.
2. Klyde D.H., Mitchell D.G. "Investigating the role of rate limiting in pilot-induced oscillations", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004; 27(5): 804-813.
3. Slotine J.J.E., Li W. *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991, 461 p.

4. Haddad W.M., Bernstein D.S. "Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and Popov Theorems and their application to robust stability", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1993; 3(4): 313-339.

5. Popov V.M. "Absolute stability of nonlinear systems of automatic control", *Automation and Remote Control*, 1962; 22(8): 857-875.

6. Khalil H.K. *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002, 750 p.

7. Jazar R.N. "Harmonic balance method", *Perturbation Methods in Science and Engineering*, Springer, Dordrecht, 2021, pp. 263-353.

8. Ginzburg-Ganz E., Belikov J., Katzir L., Levron Y. "Uses of the Popov Stability Criterion for Analyzing Global Asymptotic Stability in Power System Dynamic Models", *Energy Storage and Applications*, 2024; 1(1): 54-72.

9. Rantzer A. "On the Kalman–Yakubovich–Popov lemma", *Systems & Control Letters*, 1996; 28(1): 7-10.

10. Atherton D.P. *Nonlinear Control Engineering*, Van Nostrand Reinhold, London, 1975.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ТИПА НАСЫЩЕНИЯ

Дарья Гошгар АХМЕДОВА

Азербайджанский государственный университет
нефти и промышленности Магистрант кафедры
«Электроника и автоматика»

E-mail: darya.akhmadova@gmail.com

Резюме: Представленная статья посвящена математическому моделированию и анализу устойчивости в частотной области динамических систем третьего порядка, подверженных насыщению исполнительного механизма (актуатора), что часто встречается в современных системах управления, особенно в аэрокосмической промышленности и робототехнике. Цель исследования – разработка точных аналитических и экспериментальных моделей для предотвращения катастрофических автоколебаний (предельных циклов) и явлений прыжкового резонанса, возникающих в режимах больших ошибок, когда линейные критерии устойчивости оказываются недостаточными. В статье функция жесткого насыщения аппроксимирована с помощью функции гиперболического тангенса, а сектор абсолютной устойчивости рассчитан с применением описывающих функций (DF) и критерия Попова. Теоретические выводы проверены в среде MATLAB/Simulink, что подтверждает Глобальную Асимптотическую Устойчивость (GAS) системы.

Ключевые слова: системы третьего порядка, насыщение актуаторов, описывающие функции, предельный цикл, критерий Попова, глобальная устойчивость.

MODELING AND FREQUENCY CHARACTERISTIC OF A THIRD-ORDER NONLINEAR CONTROL SYSTEM WITH A SATURATION-TYPE NONLINEAR ELEMENT

Darya Goshgar AKHMADOVA

Azerbaijan State Oil and Industry University Master's
student of the "Electronics and Automation" department
E-mail: darya.akhmadova@gmail.com

Abstract: The presented article is devoted to the mathematical modeling and frequency-domain stability analysis of third-order dynamic systems subjected to actuator saturation, commonly encountered in modern control systems, particularly in the aerospace industry and robotics. The objective of the research is to develop precise analytical and experimental models to prevent catastrophic self-oscillations (limit cycles) and jump resonance phenomena that occur in large-error regimes where linear stability criteria are insufficient. In this article, the hard saturation function is approximated via the hyperbolic tangent function, and the absolute stability sector is calculated using Describing Functions (DF) and the Popov criterion. The theoretical derivations are validated in the MATLAB/Simulink environment, confirming the Global Asymptotic Stability (GAS) of the system.

Key words: third-order systems, actuator saturation, describing functions, limit cycle, Popov criterion, global stability.