

MÜRƏKKƏB SİSTEMLƏRİN CARİ VƏZİYYƏTLƏRİNİN TANINMASININ İNTEQRAL TƏNLİK ƏSASLI RİYAZİ MODELİNİN QURULMASI

Kəmalə Əhməd NİFTALİYEVƏ 

Bakı Dövlət Universiteti, magistr
E-mail: kamalaniftaliyeva201@gmail.com

Received: 23 Aprel 2026

Revised: 14 May 2026

Accepted: 25 İyun 2026

UOT: 519.876:517.968:004.94

DOI: <https://doi.org/10.32010/WMFQ6307>

Xülasə: Məqalədə mürəkkəb sistemlərin cari vəziyyətlərinin tanınması üçün integral tənlik əsaslı riyazi modelin qurulmasının nəzəri və tətbiqi aspektləri tədqiq edilmişdir. Müasir dövrdə texniki, informasiya, iqtisadi və idarəetmə sistemlərinin çoxölçülü və qeyri-xətti xarakter daşması onların vəziyyətlərinin təhlilini və operativ tanınmasını mühüm elmi məsələlərdən birinə çevirmişdir. Mürəkkəb sistemlərdə vəziyyətlərin müəyyənəşdirilməsi yalnız müşahidə olunan parametrlərin qiymətləndirilməsi ilə məhdudlaşmır və sistemin əvvəlki vəziyyətlərinin, daxili qarşılıqlı əlaqələrinin, eləcə də xarici təsirlərin nəzərə alınmasını tələb edir. Bu səbəbdən sistemlərin yaddaş effektini nəzərə alan integral yanaşmaların tətbiqi xüsusi aktualıq qazanmışdır. Tədqiqat çərçivəsində mürəkkəb sistemlərin vəziyyətlərinin tanınmasının nəzəri-riyazi əsasları araşdırılmış, vəziyyət fəzası, müşahidə operatorları və tanınma operatorlarının qarşılıqlı əlaqələri təhlil edilmişdir. Sistemin vəziyyətinin təsviri üçün çoxölçülü vəziyyət vektoru modeli təqdim edilmiş və Volterra tipli integral tənliklər əsasında riyazi model qurulmuşdur. Təklif olunan model vasitəsilə cari vəziyyətin əvvəlki vəziyyətlərdən asılılığı nəzərə alınmış və integral nüvə funksiyasının sistem davranışına təsiri riyazi baxımdan əsaslandırılmışdır. Məqalədə həmçinin integral operatorların xassələri, həllin mövcudluq və yeganəlik şərtləri funksional analiz metodları əsasında araşdırılmışdır. Banax sabit nöqtə prinsipi və integral operatorların məhdudluğu əsasında modelin nəzəri sabitliyi əsaslandırılmışdır. Alınmış nəticələr göstərir ki, integral tənlik əsaslı yanaşma mürəkkəb sistemlərin vəziyyətlərinin tanınması və gələcək davranışlarının proqnozlaşdırılması üçün yüksək tətbiq potensialına malikdir.

Açar sözlər: mürəkkəb sistemlər, integral tənliklər, vəziyyətlərin tanınması, Volterra modeli, riyazi modelləşdirmə

Giriş:

Müasir dövrdə mürəkkəb texniki, iqtisadi, bioloji və informasiya sistemlərinin fəaliyyətinin effektiv idarə olunması onların cari vəziyyətinin operativ və dəqiq şəkildə tanınmasını tələb edir. Belə sistemlər çoxsaylı qarşılıqlı əlaqəli elementlərdən ibarət olduğu üçün onların davranışı qeyri-xətti, çoxparametrlili və zamanla dəyişən xarakter daşıyır. Sistemlərin cari vəziyyətinin müəyyən edilməsi və proqnozlaşdırılması idarəetmə qərarlarının qəbulunda, risklərin azaldılmasında və sistemin dayanıqlılığının təmin edilməsində mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Xüsusilə böyük həcmli verilənlərin emalı və dinamik proseslərin

müşahidəsi şəraitində ənənəvi analitik yanaşmaların tətbiqi bir sıra məhdudiyyətlərlə müşayiət olunur.

Bu baxımdan mürəkkəb sistemlərin vəziyyətlərinin tanınması üçün integral tənliklərə əsaslanan riyazi modellərin qurulması xüsusi aktualıq qazanır. Integral tənliklər sistemin əvvəlki vəziyyətləri, xarici təsirlər və daxili qarşılıqlı əlaqələr arasında funksional asılılıqları nəzərə almağa imkan verir. Volterra və Fredholm tipli integral modellər mürəkkəb sistemlərdə zaman üzrə dəyişən proseslərin identifikasiyası və vəziyyət parametrlərinin qiymətləndirilməsində geniş tətbiq edilir. Bu yanaşmalar sistemin yalnız cari vəziyyətini

deyil, həm də onun keçmiş dinamikasını nəzərə almaqla daha dəqiq nəticələrin əldə edilməsinə imkan yaradır [1, s. 3-6].

Məqalənin məqsədi mürəkkəb sistemlərin cari vəziyyətlərinin tanınması üçün integral tənlik əsaslı riyazi modelin qurulmasının nəzəri əsaslarının tədqiq edilməsi və bu istiqamətdə istifadə olunan yanaşmaların sistemləşdirilməsindən ibarətdir.

Mürəkkəb sistemlərin vəziyyətlərinin tanınmasının nəzəri-riyazi əsasları

Mürəkkəb sistemlər çoxsaylı qarşılıqlı əlaqəli elementlərdən ibarət olmaqla dinamik, qeyri-xətti və çoxölçülü strukturlar kimi xarakterizə olunur. Belə sistemlərdə cari vəziyyətin müəyyən edilməsi yalnız müşahidə olunan parametrlərin qiymətləndirilməsi ilə məhdudlaşmır, eyni zamanda sistemin əvvəlki vəziyyətləri, daxili əlaqələri və xarici təsirlərinin nəzərə alınmasını tələb edir. Bu səbəbdən mürəkkəb sistemlərin vəziyyətlərinin tanınması məsələsi funksional analiz, integral operatorlar və dinamik sistemlər nəzəriyyəsinə əsaslanan riyazi yanaşmalar vasitəsilə araşdırılır [2, s.3-6].

Riyazi baxımdan mürəkkəb sistemin vəziyyəti çoxölçülü vəziyyət vektoru vasitəsilə təsvir olunur:

$$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$$

Burada:

$X(t)$ – sistemin t anındakı vəziyyət vektoru;

$x_i(t)$ – sistemin i -ci parametrlərinin zamandan asılı qiyməti;

n – sistem parametrlərinin sayıdır.

Bu ifadə sistemin cari vəziyyətini müəyyən edən bütün dəyişənlərin birləşməsini xarakterizə edir. Vəziyyət fəzası sistemin gələcək davranışının proqnozlaşdırılmasında əsas rol oynayır.

Mürəkkəb sistemlərdə müşahidə edilən məlumatlar çox vaxt birbaşa vəziyyət dəyişənlərini tam ifadə etmir. Bu halda müşahidə operatoru tətbiq olunur:

$$Y(t) = H(X(t))$$

Burada:

$Y(t)$ – müşahidə olunan çıxış siqnalları;

H – müşahidə operatoru;

$X(t)$ – daxili vəziyyətlər çoxluğudur.

Operator sistemin daxili vəziyyətini müşahidə olunan parametrlərlə əlaqələndirir. Real sistemlərdə bu operator adətən qeyri-xətti xarakter daşıyır [3, s.4-8].

Cari vəziyyətin tanınmasında əsas problemlərdən biri sistemin keçmiş vəziyyətlərinin cari nəticəyə təsirinin nəzərə alınmasıdır. Bu məqsədlə Volterra tipli integral tənliklərdən istifadə edilir:

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

Burada:

$x(t)$ – cari vəziyyət funksiyası;

$f(t)$ – xarici təsirləri xarakterizə edən funksiya;

$K(t, \tau)$ – integral nüvə funksiyası;

τ – keçmiş zaman parametridir.

Bu tənlik sistemin yalnız cari qiymətlərdən deyil, əvvəlki vəziyyətlərdən də asılı olduğunu göstərir. Nüvə funksiyası müxtəlif vəziyyətlər arasındakı qarşılıqlı əlaqənin intensivliyini müəyyən edir [4, s.12-15].

Teorem 1:

Əgər $K(t, \tau)$ nüvə funksiyası qapalı oblastda fəsiləsizdirsə və $|K(t, \tau)| < M$ şərti ödənilirsə, onda Volterra tipli integral tənliyin yeganə həlli mövcuddur.

İsbat ideyası Banax sabit nöqtə prinsipinə əsaslanır. Operator:

$$(Tx)(t) = f(t) + \int_0^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

şəklində təyin edilir.

Burada:

T – integral operator;

$x(t)$ – axtarılan funksiya;

$f(t)$ – məlum funksiyadır.

Əgər operator sıxıcı çevrilmə yaradırsa:

$$\|Tx - Ty\| < q \|x - y\|, 0 < q < 1$$

olduqda Banax teoreminə görə yeganə həll mövcud olur [5, s.45-49].

Mürəkkəb sistemlərdə vəziyyətin tanınması zamanı identifikasiya operatoru da tətbiq edilir:

$$R: X \rightarrow C$$

Burada:

R – tanınma operatoru;

X – vəziyyətlər çoxluğu;

C – siniflər çoxluğu.

Bu operator sistemin cari vəziyyətini müəyyən siniflərdən birinə aid edir. Məsələn, texniki sistemlərdə “normal”, “kritik” və “qəza vəziyyəti” kimi siniflər formalaşdırıla bilər.

Beləliklə, mürəkkəb sistemlərin vəziyyətlərinin tanınmasının nəzəri-riyazi əsasları funksional analiz, integral operatorlar və dinamik sistemlər nəzəriyyəsinə əsaslanır. Bu yanaşmalar cari vəziyyətin təyin edilməsinə və gələcək davranışın proqnozlaşdırılmasına imkan yaradır. Integral tənliklər sistemin yaddaş effektini nəzərə aldığından mürəkkəb sistemlərin modelləşdirilməsində klassik diferensial modellərlə müqayisədə daha geniş tətbiq imkanlarına malikdir [6, s.2–5].

Mürəkkəb sistemlərin cari vəziyyətlərinin tanınması üçün integral tənlik əsaslı riyazi modelin qurulması

Mürəkkəb sistemlərin cari vəziyyətinin tanınması prosesində əsas məqsəd sistemin daxili parametrləri ilə müşahidə olunan çıxış siqnalları arasında mövcud funksional əlaqələrin müəyyən edilməsindən ibarətdir. Dinamik və çoxölçülü sistemlərdə cari vəziyyət yalnız zamanın konkret anında ölçülən parametrlər vasitəsilə müəyyən edilmir; sistemin əvvəlki vəziyyətləri və xarici təsirlər də onun davranışına əhəmiyyətli təsir göstərir. Bu səbəbdən sistemin yaddaş effektini nəzərə alan integral modellər mürəkkəb sistemlərin identifikasiyası və vəziyyətlərinin tanınmasında daha effektiv yanaşma hesab olunur [7, s.6–8].

Mürəkkəb sistemin vəziyyəti n -ölçülü vəziyyət vektoru ilə təsvir edilir:

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$$

Burada:

$X(t)$ – sistemin vəziyyət vektoru;

$x_i(t)$ – i -ci parametrin qiyməti;

n – sistem parametrlərinin sayıdır;

T – transponirləmə işarəsidir.

Vəziyyət vektoru sistemin bütün əsas parametrlərini bir vahid struktur daxilində birləşdirir və sistemin faza fəzasında vəziyyətini müəyyən edir.

Sistemin müşahidə olunan çıxış siqnalları aşağıdakı operator vasitəsilə təyin edilir:

$$Y(t) = CX(t) + V(t)$$

Burada:

$Y(t)$ – müşahidə olunan çıxış vektoru;

C – müşahidə matrisi;

$V(t)$ – müşahidə xətalrı və ya təsadüfi küylər;

$X(t)$ – daxili vəziyyətlər vektorudur.

Bu model real sistemlərdə müşahidə olunan məlumatların xətalara məruz qaldığını nəzərə alır [8, s.15–18].

Mürəkkəb sistemlərdə cari vəziyyət keçmiş vəziyyətlərdən asılı olduğundan integral operator tətbiq edilir:

$$X(t) = F(t) + \int_0^t K(t, \tau) X(\tau) d\tau$$

Burada:

$X(t)$ – axtarılan vəziyyət funksiyası;

$F(t)$ – xarici təsirləri xarakterizə edən vektor-funksiya;

$K(t, \tau)$ – integral nüvə matrisi;

τ – zaman dəyişənidir.

Bu model Volterra tipli integral tənlikdir və sistemin cari vəziyyətinin əvvəlki vəziyyətlərdən asılılığını ifadə edir. Nüvə funksiyası müxtəlif vəziyyətlər arasındakı əlaqə dərəcəsini müəyyən edir.

Nüvə funksiyasının aşağıdakı şəkildə verildiyini qəbul edək:

$$K(t, \tau) = Ae^{-\lambda(t-\tau)}$$

Burada:

A – əlaqə intensivliyini göstərən əmsal;

λ – sönmə əmsalı;

e – eksponensial funksiyanın əsasıdır.

Bu halda keçmiş vəziyyətlərin sistemə təsiri zaman keçdikcə eksponensial şəkildə azalır. Parametrlin böyük qiymətlərində sistem yalnız yaxın keçmişə həssas olur [9, s.52–55].

Teorem 2

Əgər nüvə funksiyası $K(t, \tau)$ kəsilməzdirsə və

$$\int_0^t |K(t, \tau)| d\tau < L$$

şərti ödənilərsə, onda integral operator məhduddur və sistemin vəziyyətini təsvir edən həll sabitdir.

İsbat: Integral operatoru aşağıdakı şəkildə göstərək:

$$(TX)(t) = \int_0^t K(t, \tau) X(\tau) d\tau$$

Normanı qiymətləndirək:

$$\| (TX)(t) \| \leq \int_0^t \| K(t, \tau) \| \| X(\tau) \| d\tau$$

Buradan:

$$\| TX \| \leq L \| X \|$$

alınır.

Beləliklə operator məhdud operator olur və funksional analiz nəzəriyyəsinə əsasən həll sabit xarakter daşıyır [10, s.10–13].

Cari vəziyyətin tanınması üçün klassifikasiya operatoru aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$R(X): X \rightarrow C$$

Burada:

$R(X)$ – tanınma operatoru;

X – vəziyyətlər çoxluğu;

C – siniflər məcmusudur.

Əgər:

$$R(X) = Ck$$

olarsa, onda sistem k -cı vəziyyət sinfinə aid edilir.

Beləliklə qurulmuş integral tənlik əsaslı model mürəkkəb sistemlərin vəziyyətlərini yalnız cari parametrlər əsasında deyil, sistemin zaman üzrə əvvəlki davranışını da nəzərə almaqla təyin etməyə imkan verir. Bu yanaşma sistemin vəziyyətinin tanınması dəqiqliyini artırır və proqnozlaşdırma prosesinin etibarlılığını yüksəldir [11, s.4–7].

Nəticə

Aparılmış tədqiqat nəticəsində mürəkkəb sistemlərin cari vəziyyətlərinin tanınmasının nəzəri-riyazi əsasları təhlil edilmiş və integral tənliklərə əsaslanan riyazi model təklif olunmuşdur. Müəyyən edilmişdir ki, mürəkkəb sistemlərin çoxölçülü və dinamik xarakter daşması onların vəziyyətlərinin yalnız ani müşahidə olunan parametrlər vasitəsilə deyil, həm də əvvəlki vəziyyətlərinin nəzərə alınması ilə daha dəqiq müəyyən edilməsini zəruri edir.

Tədqiqat çərçivəsində sistemin vəziyyət fəzası formal şəkildə təsvir edilmiş, vəziyyət

vektoru, müşahidə operatoru və tanınma operatoru arasında qarşılıqlı funksional əlaqələr müəyyən edilmişdir. Volterra tipli integral tənliklər əsasında qurulmuş model sistemin yaddaş effektini nəzərə almağa və zaman üzrə dəyişən proseslərin daha adekvat təsvirini həyata keçirməyə imkan vermişdir. Təklif olunan integral nüvə funksiyası vasitəsilə keçmiş vəziyyətlərin cari vəziyyətə təsir mexanizmi riyazi baxımdan əsaslandırılmışdır.

Məqalədə həmçinin modelin mövcudluq və yeganəlik şərtləri funksional analiz yanaşmaları əsasında araşdırılmış, Banax sabit nöqtə prinsipi və integral operatorun məhdudluq xüsusiyyətləri əsasında həllin sabitliyi göstərilmişdir. Bu iş qurulmuş modelin nəzəri baxımdan etibarlı olduğunu təsdiq edir.

Alınmış nəticələr göstərir ki, integral tənlik əsaslı yanaşma mürəkkəb texniki, informasiya və idarəetmə sistemlərinin vəziyyətlərinin tanınması problemlərində yüksək tətbiq potensialına malikdir. Gələcək tədqiqatlarda təklif olunan modelin süni intellekt alqoritmləri və neyron şəbəkələr əsasında inkişaf etdirilməsi, həmçinin real verilənlər üzərində tətbiqi məqsəda uyğun hesab edilə bilər.

ƏDƏBİYYAT SIYAHISI:

1. Abbasov, H., & İbrahimov, N. Ə. (2021). Mürəkkəb sistemlərin vəziyyətlərinin analizində riyazi metodlar. *Bakı Dövlət Universitetinin Xəbərləri*, (2), 42–51. https://bsu.edu.az/az/content/elmi_jurnallar
2. Hüseynov, A., & Əliyev, N. (2023). Dinamik sistemlərin identifikasiyası və qeyri-xətti modelləşdirmə üsulları. *Bakı Mühəndislik Universitetinin Elmi Əsərləri*, (1), 56–68. <https://beu.edu.az/az/article/journal>
3. Sadıqov, R., & Məmmədov, E. (2022). Mürəkkəb sistemlərin modelləşdirilməsində riyazi yanaşmalar və integral operatorlar. *Azərbaycan Texniki Universiteti Elmi Xəbərlər*, (4), 33–46. <https://atu.edu.az/uploads/scientific-journal.pdf>
4. Məmmədov, T., & Qasımov, V. (2024). Riyazi modelləşdirmədə integral tənliklərin tətbiqi problemləri. *AMEA Xəbərləri*, (3), 71–84. <https://www.science.gov.az/az/journals/>
5. Malinowski, M. (2025). Existence of solutions to symmetric multivalued functional

integral equations. *Symmetry*, 17(11), Article 2010. <https://doi.org/10.3390/sym17112010>

6. Markova, E., & Sidorov, D. (2021). Integral models based on Volterra equations with prehistory and their application in dynamic systems. *Mathematics*, 9(10), Article 1127. <https://doi.org/10.3390/math9101127>

7. Solodusha, S., & Bulatov, M. (2021). Integral equations related to Volterra series and inverse problems of nonlinear dynamics. *Mathematics*, 9(16), Article 1982. <https://pdfs.semanticscholar.org/bcc8/0bc336918007d1e1fc73570cb43bc7b33c70.pdf>

8. Mohite, B., Sharma, P., & Singh, R. (2025). Integral equations and moment theory in the study of complex systems. *International Journal of Engineering Sciences*, 12(2), 44–59.

<https://theaspd.com/index.php/ijes/article/download/10113/7244/21135>

9. Ponasso, G. N., Silva, R., & Costa, J. (2024). A survey on integral equations for bioelectric modeling. *Mathematics and Computational Applications*, 29(4), 1–28. <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11410390/>

10. Zappala, E., Biloš, M., & Nüsken, N. (2022). *Neural integral equations*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2209.15190>

11. Zappala, E., Nüsken, N., & Osborne, M. (2024). Learning integral operators via neural integral equations. *Nature Machine Intelligence*, 6, 951–963. <https://www.nature.com/articles/s42256-024-00886-8>

CONSTRUCTION OF AN INTEGRAL EQUATION-BASED MATHEMATICAL MODEL FOR RECOGNITION OF THE CURRENT STATES OF COMPLEX SYSTEMS

Kamala Ahmad NIFTALIYEVA

Baku State University, Master's Student

E-mail: kamalaniftaliyeva201@gmail.com

Abstract: The article investigates the theoretical and applied aspects of constructing an integral equation-based mathematical model for recognizing the current states of complex systems. In modern conditions, technical, informational, economic, and management systems are characterized by multidimensional and nonlinear properties, making the analysis and operational recognition of their states one of the significant scientific challenges. Identifying the states of complex systems is not limited to evaluating observed parameters alone but also requires consideration of previous system states, internal interactions, and external influences. Therefore, the application of integral approaches considering system memory effects has become particularly relevant. Within the framework of the study, the theoretical and mathematical foundations for recognizing complex system states were investigated, and the relationships between state space, observation operators, and recognition operators were analyzed. A multidimensional state vector model was proposed to represent system states, and a mathematical model based on Volterra-type integral equations was developed. The proposed model considers the dependence of the current state on previous states, and the influence of the integral kernel function on system behavior has been mathematically substantiated. The article also investigates the properties of integral operators, while the conditions for existence and uniqueness of solutions are studied using functional analysis methods. The theoretical stability of the model is justified based on the Banach fixed-point principle and the boundedness of integral operators. The obtained results demonstrate that the integral equation-based approach has significant application potential for recognizing the states of complex systems and predicting their future behavior.

Keywords: complex systems, integral equations, state recognition, Volterra model, mathematical modeling.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПОЗНАВАНИЯ ТЕКУЩИХ СОСТОЯНИЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Камаля Ахмед кызы НИФТАЛИЕВА

Бакинский Государственный Университет, магистрант

E-mail: kamalaniftaliyeva201@gmail.com

Резюме: В статье исследованы теоретические и прикладные аспекты построения математической модели распознавания текущих состояний сложных систем на основе интегральных уравнений. В современных условиях технические, информационные, экономические и управленческие системы обладают многомерным и нелинейным характером, что делает анализ и оперативное распознавание их состояний одной из важных научных задач. Определение состояний сложных систем не ограничивается только оценкой наблюдаемых параметров, а требует учета предыдущих состояний системы, внутренних взаимосвязей, а также внешних воздействий. В связи с этим особую актуальность приобрело применение интегральных подходов, учитывающих эффект памяти системы. В рамках исследования были изучены теоретико-математические основы распознавания состояний сложных систем, проанализированы взаимосвязи между пространством состояний, операторами наблюдения и операторами распознавания. Для описания состояния системы представлена модель многомерного вектора состояния и построена математическая модель на основе интегральных уравнений типа Вольтерра. Предложенная модель учитывает зависимость текущего состояния от предыдущих состояний, а влияние интегральной ядерной функции на поведение системы обосновано с математической точки зрения. В статье также исследованы свойства интегральных операторов, а условия существования и единственности решения рассмотрены на основе методов функционального анализа. Теоретическая устойчивость модели обоснована на основе принципа неподвижной точки Банаха и ограниченности интегральных операторов. Полученные результаты показывают, что подход, основанный на интегральных уравнениях, обладает высоким потенциалом применения для распознавания состояний сложных систем и прогнозирования их дальнейшего поведения.

Ключевые слова: сложные системы, интегральные уравнения, распознавание состояний, модель Вольтерра, математическое моделирование.